Nona Edição

CAPÍTULO

7

MECÂNICA VETORIAL PARA ENGENHEIROS:

ESTÁTICA

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

Notas de Aula:

J. Walt Oler

Texas Tech University

Forças em Vigas e Cabos



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Conteúdo

Introdução
Forças Internas em Elementos
Problema Resolvido 7.1
Diversos Tipos de Carregamento e de Apoio
Esforço Cortante e Momentoo Fletor em uma Viga
Problema Resolvido 7.2
Problema Resolvido 7.3
Relações entre Carregamento, Esforço Cortante e Momento Fletor
Problema Resolvido 7.4
Problema Resolvido 7.6
Cabos com Cargas Concentradas
Cabos com Cargas Distribuídas
Cabo Parabólico
Problema Resolvido 7.8
Catenária

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Introdução

- Os capítulos anteriores lidaram com:
 a) A determinação das forças externas que atuam em uma estrutura e
 b) A determinação das forças que mantêm unidos os vários elementos que formam uma estrutura.

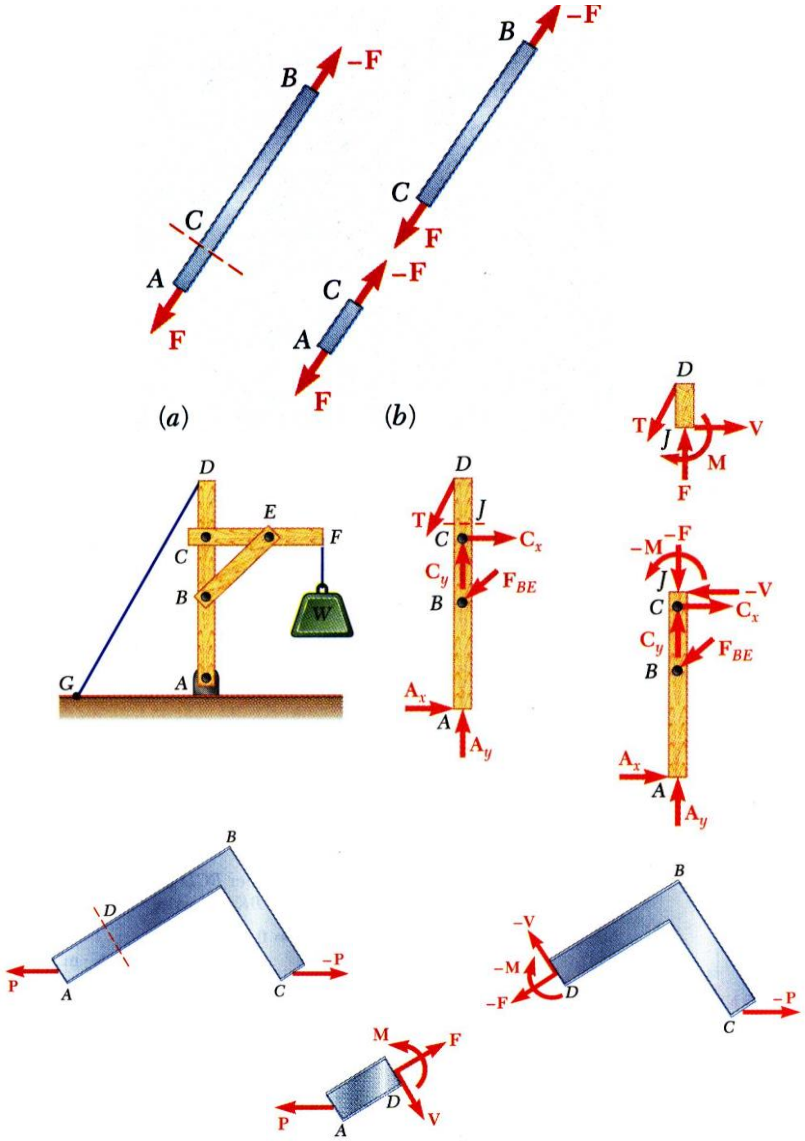
- Neste capítulo, preocupa-se com a determinação das *forças internas* (ou seja, que produzem tração/compressão, cisalhamento e flexão) que mantêm unidas as várias partes de um dado elemento.

- Será dada especial atenção a dois importantes tipos de estruturas de engenharia:
 a) Vigas – geralmente são elementos prismáticos longos e retos, projetados para sustentar cargas aplicadas em vários pontos ao longo do elemento.
 b) Cabos - são elementos flexíveis capazes de resistir apenas à tração, projetados para suportar cargas concetradas ou distribuídas.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

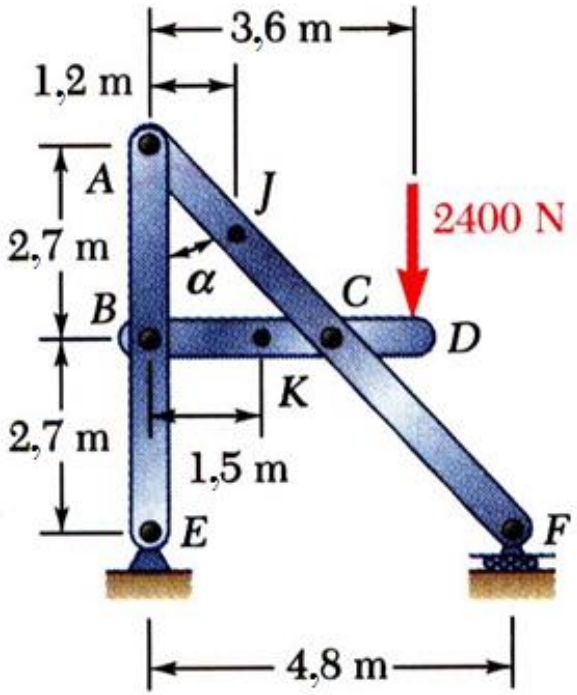
Forças Internas em Elementos



- O elemento reto *AB* está em equilíbrio sob a aplicação de duas forças *F* e *–F*.
- *As forças internas* equivalentes a *F* e *-F* são necessárias para o equilíbrio dos corpos livres *AC* e *CB*.
- O elemento *AD*, sujeito à ação de múltiplas forças, está em equilíbrio sob a ação das forças provenientes do contato com o cabo *CD* e com os elementos *CF* e *BE*.
- Forças internas equivalentes a um sistema força-binário são necessárias para o equilíbrio dos corpos livres *JD* e *ABCJ*.
- Um sistema força-binário interno é necessário para o equilíbrio de elementos sob a ação de duas forças que não são retos.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.1



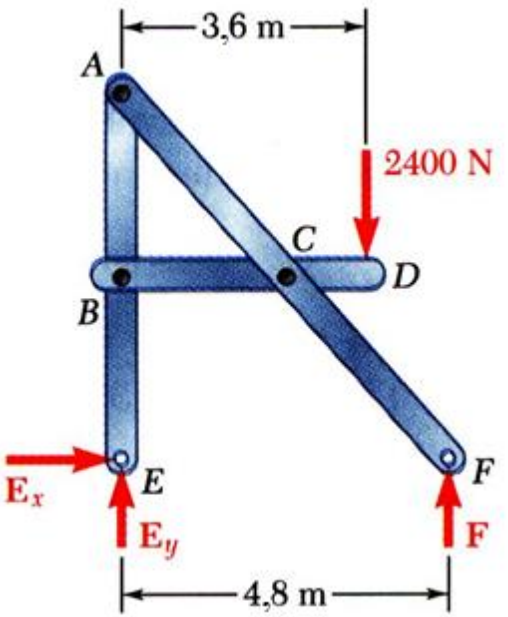
Determine as forças internas *(a)* no elemento *ACF* no ponto *J* e *(b)* no elemento *BCD* em *K*.

SOLUÇÃO:

- Determinamos as reações de apoio e as forças que atuam em cada elemento.
- Cortamos o elemento *ACF* em *J*. As forças internas em *J* são representadas pelo sistema força-binário equivalente, o qual é determinado considerando-se o equilíbrio de cada parte.
- Cortamos o elemento *BCD* em *K*. Determinamos o sistema força-binário equivalente às forças internas em *K* aplicando as condições de equilíbrio a cada uma das partes

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.1



SOLUÇÃO:

- Calculamos as reações de apoio e as forças nos elementos.

Considerando a estrutura inteira como um corpo livre:

$$\sum M_E = 0:$$

$$-(2400\,\text{N})(3{,}6\,\text{m}) + F(4{,}8\,\text{m}) = 0 \qquad F = 1800\,\text{N}$$

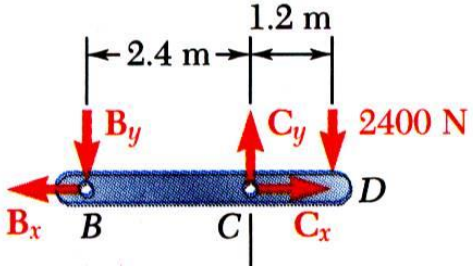
$$\sum F_y = 0:$$

$$-2400\,\text{N} + 1800\,\text{N} + E_y = 0 \qquad E_y = 600\,N$$

$$\sum F_x = 0: \qquad E_x = 0$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.1

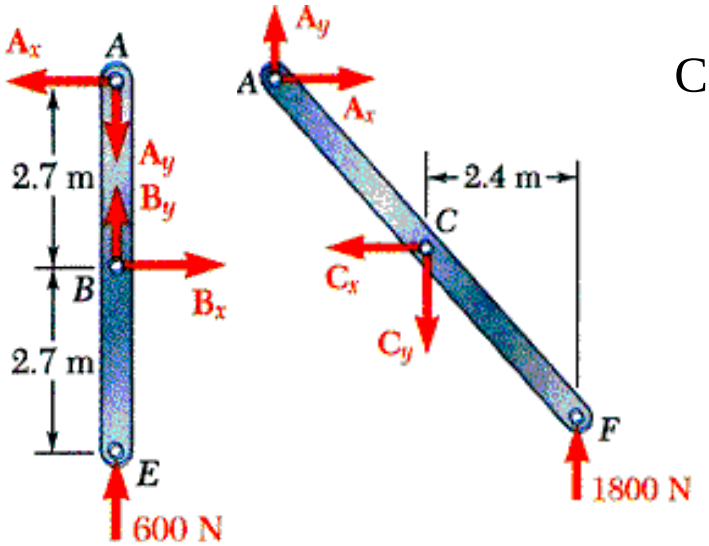


Considerando o elemento *BCD* como um corpo livre:

$$\sum M_B = 0: \qquad -(2400\ \text{N})(3{,}6\ \text{m}) + C_y(2{,}4\ \text{m}) = 0 \qquad C_y = 3600\ \text{N}$$

$$\sum M_C = 0: \qquad -(2400\ \text{N})(1{,}2\ \text{m}) + B_y(2{,}4\ \text{m}) = 0 \qquad B_y = 1200\ \text{N}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad -B_x + C_x = 0$$



Considerando o elemento *ABE* como um corpo livre:

$$\sum M_A = 0: \qquad B_x(2{,}4\ \text{m}) = 0 \qquad B_x = 0$$

$$\sum F_x = 0: \qquad B_x - A_x = 0 \qquad A_x = 0$$

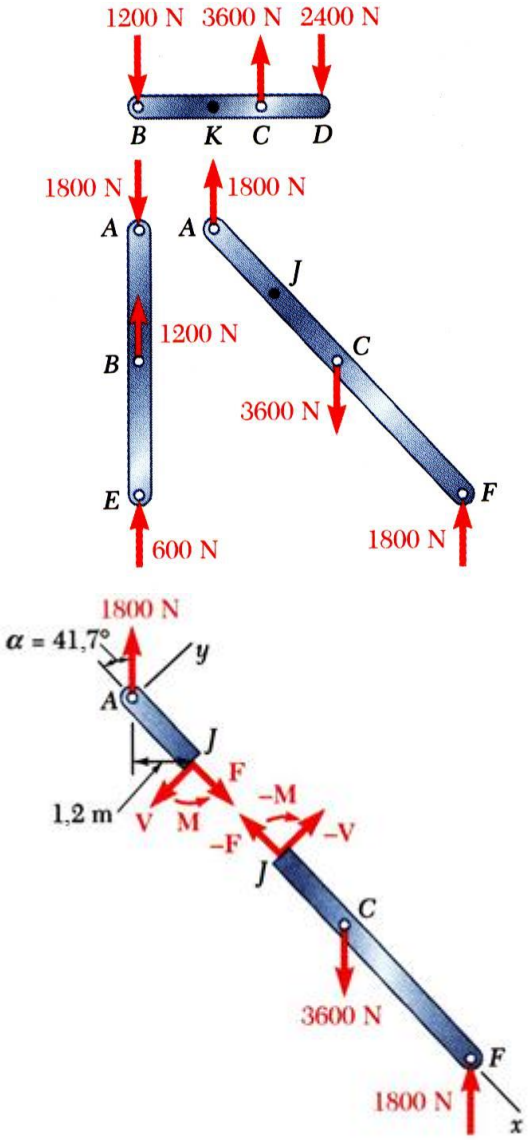
$$\sum F_y = 0: \qquad -A_y + B_y + 600\ \text{N} = 0 \qquad A_y = 1800\ \text{N}$$

A partir do elemento *BCD*,

$$\sum F_x = 0: \qquad -B_x + C_x = 0 \qquad C_x = 0$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.1



- Cortamos o elemento *ACF* em *J*. As forças internas em *J* são representadas pelo sistema força-binário equivalente.

Considerando o corpo livre *AJ* temos:

$$\sum M_J = 0:$$

$$-(1800\ \text{N})(1{,}2\ \text{m}) + M = 0 \qquad M = 2160\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\sum F_x = 0:$$

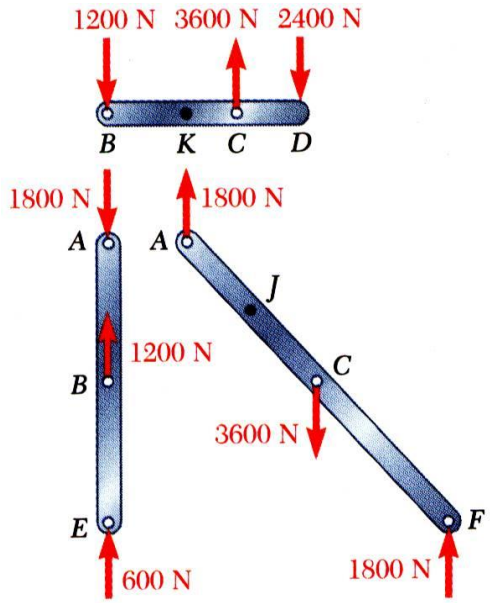
$$F - (1800\ \text{N})\cos 41{,}7° = 0 \qquad F = 1344\ \text{N}$$

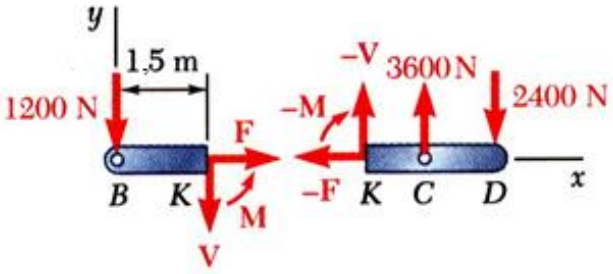
$$\sum F_y = 0:$$

$$-V + (1800\ \text{N})\,\text{sen}\,41{,}7° = 0 \qquad V = 1197\ \text{N}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.1





- Cortamos o elemento *BCD* em *K* e determinamos o sistema força-binário equivalente às forças internas em *K*.

Condiderando o corpo livre *BK* temos:

$$\sum M_K = 0:$$

$$(1200\,\text{N})(1{,}5\,\text{m}) + M = 0 \qquad \boxed{M = -1800\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

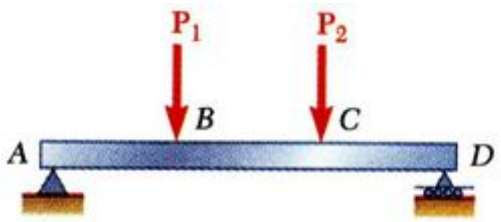
$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{F = 0}$$

$$\sum F_y = 0:$$

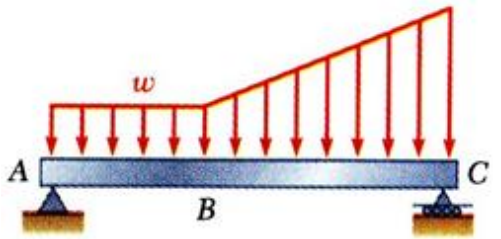
$$-1200\,\text{N} - V = 0 \qquad \boxed{V = -1200\,\text{N}}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Diversos Tipos de Carregamento e de Apoio



(a) Cargas concentradas



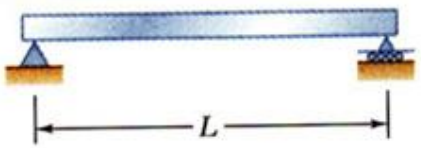
(b) Carga distribuída

- *Viga* - elemento estrutural projetado para sustentar cargas aplicadas em vários pontos ao longo de seu comprimento.
- Uma Viga pode estar submetida a cargas *concentradas* ou cargas *distribuídas* ou a uma combinação de ambas.
- O *projeto de uma viga* consiste em um processo de duas etapas:
 1) determinar os esforços cortantes e os momentos fletores produzidos pelas cargas aplicadas;
 2) selecionar a seção reta mais adequada para resistir aos esforços cortantes e momentos fletores.

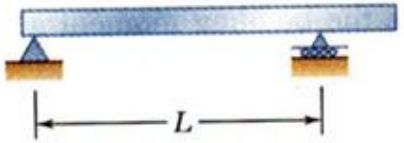
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Diversos Tipos de Carregamento e de Apoio

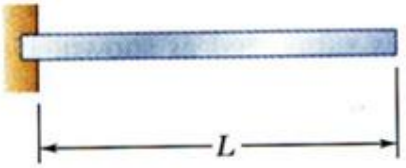
Vigas estaticamente determinadas



(a) Viga simplesmente apoiada

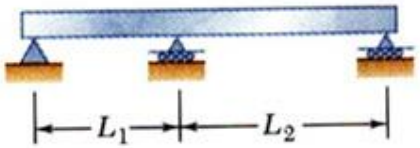


(b) Viga apoiada com extremidade em balanço

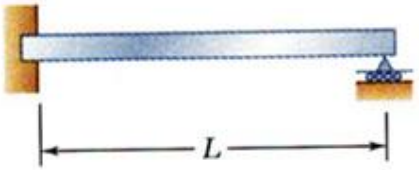


(c) Viga em balanço

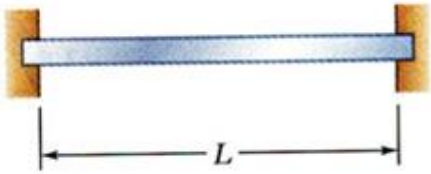
Vigas estaticamente indeterminadas



(d) Viga contínua



(e) Viga fixada em uma extremidade e apoiada na outra

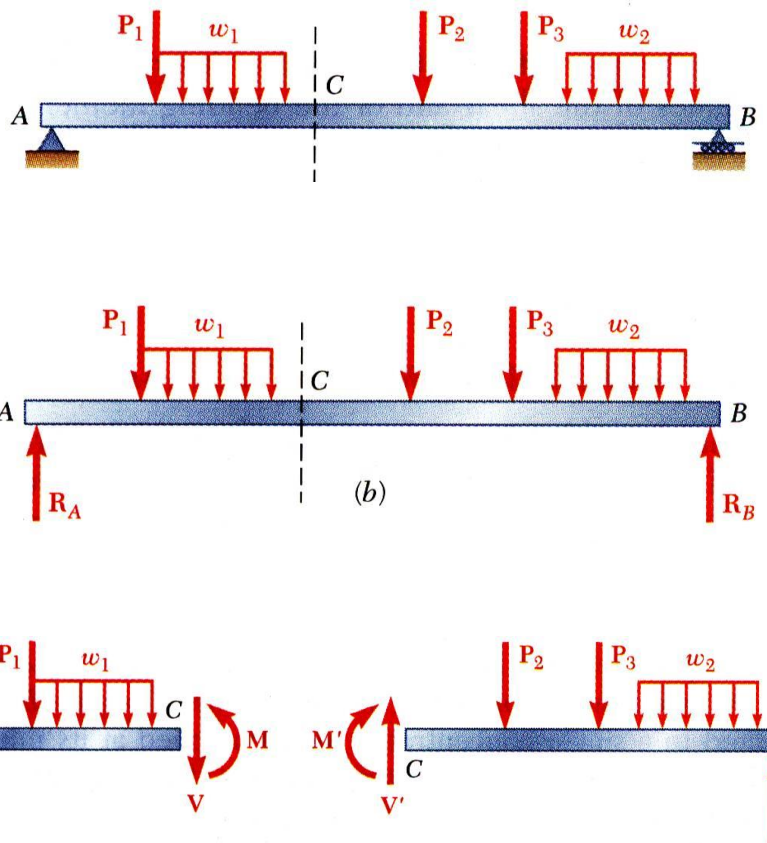


(f) Viga engastada nas duas extremidades

- As vigas são classificadas de acordo com o modo como são apoiadas.
- As reações de apoio das vigas serão estaticamente determinadas se os apoios envolverem apenas três incógnitas. Caso contrário, as reações serão estaticamente indeterminadas.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Esforço Cortante e Momentoo Fletor em uma Viga

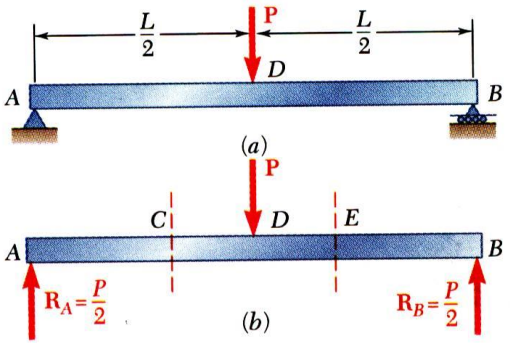


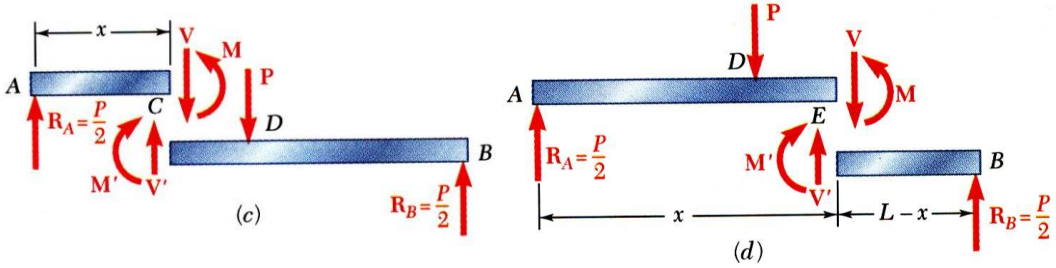
- Deseja-se determinar o momento fletor e o esforço cortante em qualquer ponto de uma viga sujeita a cargas concentradas e distribuídas.
- Determinamos as reações de apoio tratando a viga inteira como um corpo livre.
- Cortamos a viga em *C* e traçamos diagramas de corpo livre para *AC* e para *CB*. Por convenção, os sentidos positivos para sistemas força-binário internos são os mostrados ao lado.
- Considerando o equilíbrio de cada uma das partes, determinamos *M e V* ou *M'* e *V'*.

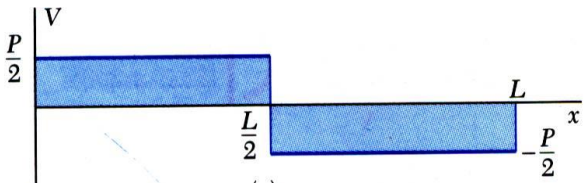
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

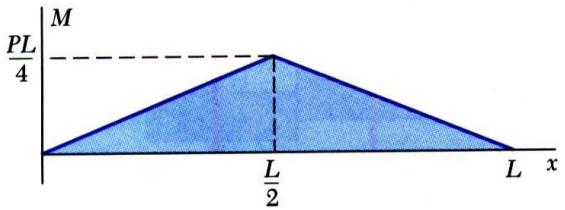
Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Diagramas de Esforço Cortante e de Momento Fletor









- As variações do esforço e do momento fletor ao longo da viga podem ser representadas por meio de gráficos.
- Determinamos as reações de apoio.
 - Cortando a viga em *C* e considerando o elemento *AC* temos:

$$V = +P/2 \quad M = +Px/2$$

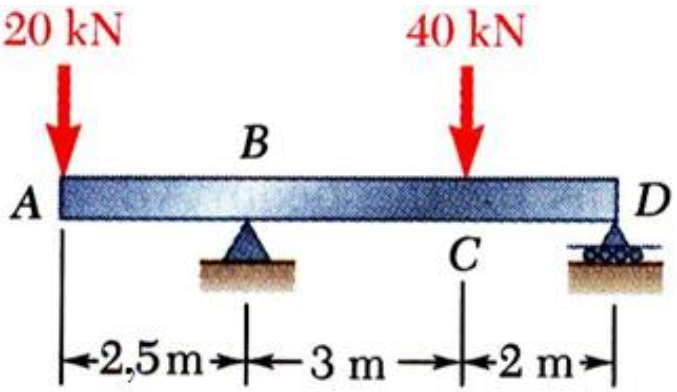
 - Cortando a viga em *E* e considerando o elemento *EB* temos:

$$V = -P/2 \quad M = +P(L-x)/2$$

- Para uma viga sujeita somente a <u>cargas concentradas</u>, o esforço cortante é constante e o momento fletor varia linearmente entre as cargas.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.2



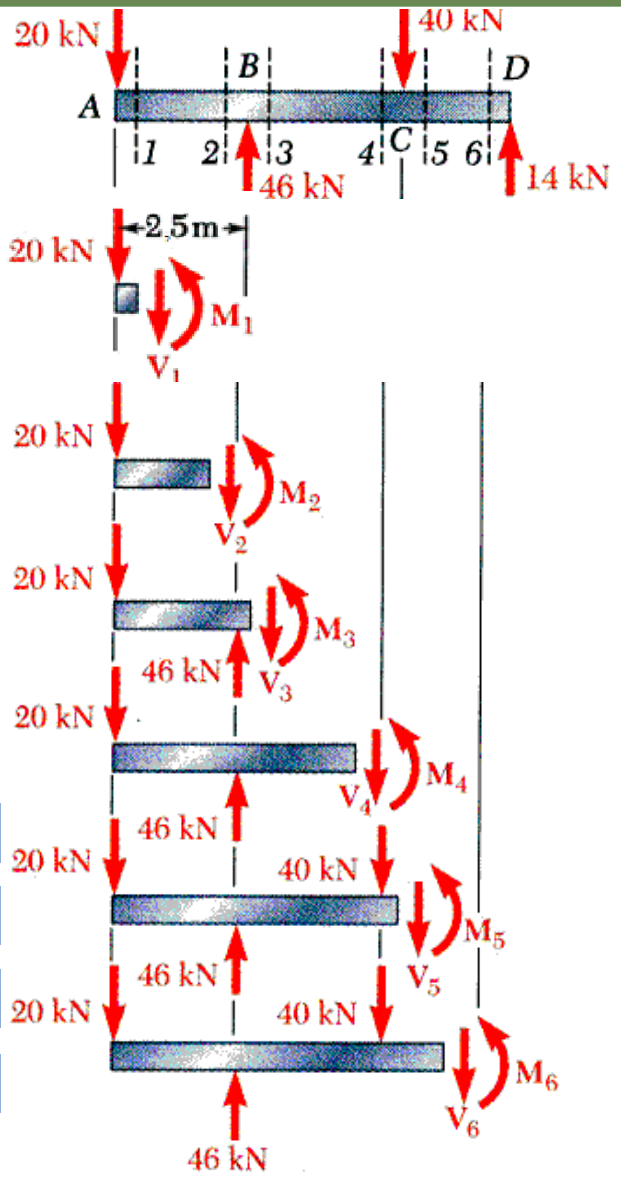
Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento mostrado.

SOLUÇÃO:

- A partir do diagrama de corpo livre da viga inteira, encontramos as reções em *B* e *D*.
- Encontramos sistemas força-binário internos equivalentes para os corpos livres formados pelo corte da viga em ambos os lados dos pontos de aplicação de carga.
- Plotamos os resultados.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.2



SOLUÇÃO:

- A partir do diagrama de corpo livre da viga inteira, encontramos as reções em *B* e *D*.

- Encontramos sistemas força-binário internos equivalentes nas seções em ambos os lados dos pontos de aplicação de carga.

$$\sum F_y = 0: \quad -20\,\text{kN} - V_1 = 0 \qquad \boxed{V_1 = -20\,\text{kN}}$$

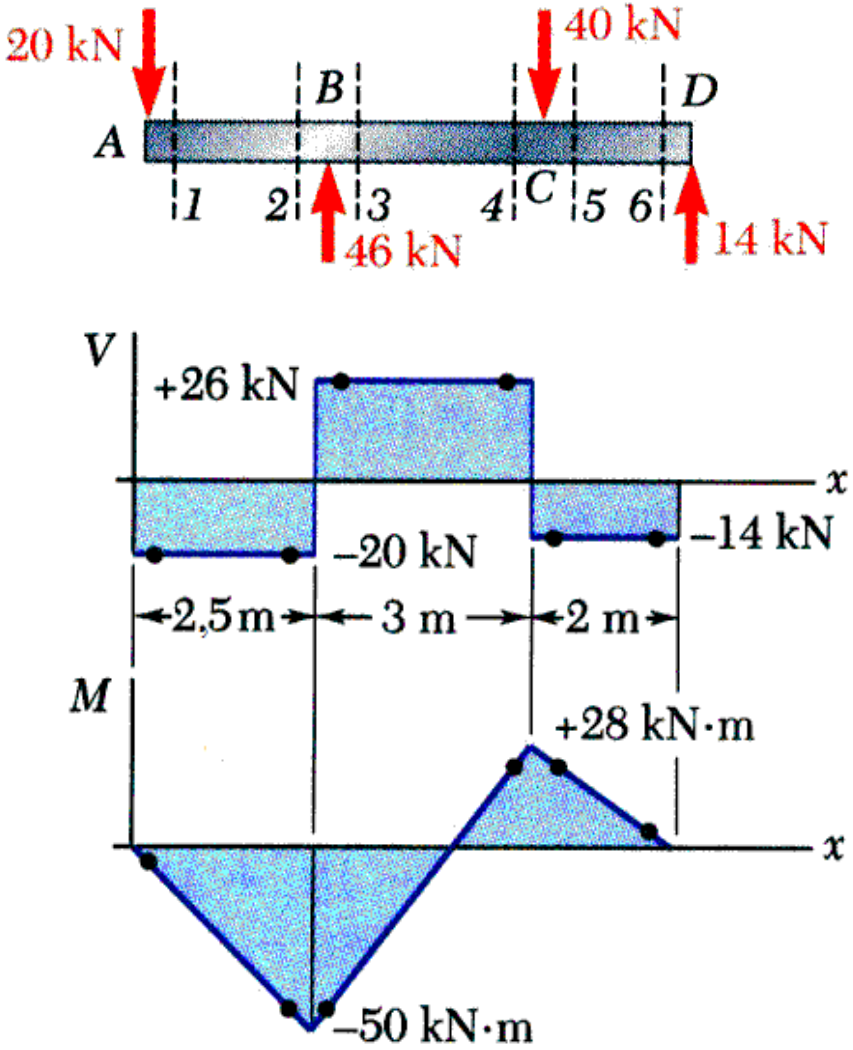
$$\sum M_2 = 0: \quad (20\,\text{kN})(0\,\text{m}) + M_1 = 0 \qquad \boxed{M_1 = 0}$$

De maneira análoga,

$$\boxed{\begin{aligned} V_3 &= 26\,\text{kN} & M_3 &= -50\,\text{kN}\cdot\text{m} \\ V_4 &= 26\,\text{kN} & M_4 &= 28\,\text{kN}\cdot\text{m} \\ V_5 &= -14\,\text{kN} & M_5 &= 28\,\text{kN}\cdot\text{m} \\ V_6 &= -14\,\text{kN} & M_6 &= 0 \end{aligned}}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.2

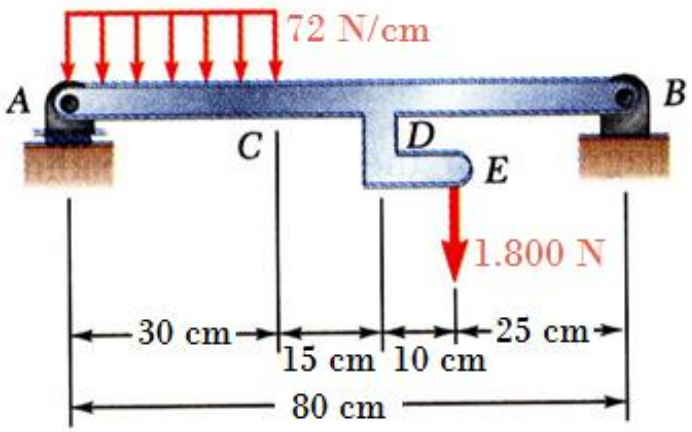


- Plotamos os resultados.

 Deve-se observar que o esforço cortante é constante e o momento fletor varia linearmente entre cargas concentradas.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.3



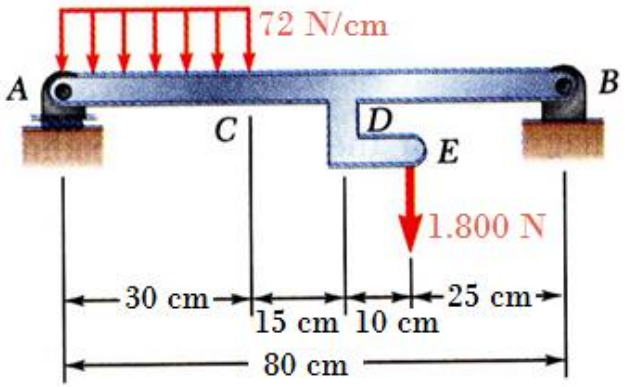
Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga *AB*. A carga distribuída de 72 N/cm estende-se por 30 cm sobre a viga, de *A* até *C*, e a carga de 1.800 N é aplicada em *E*.

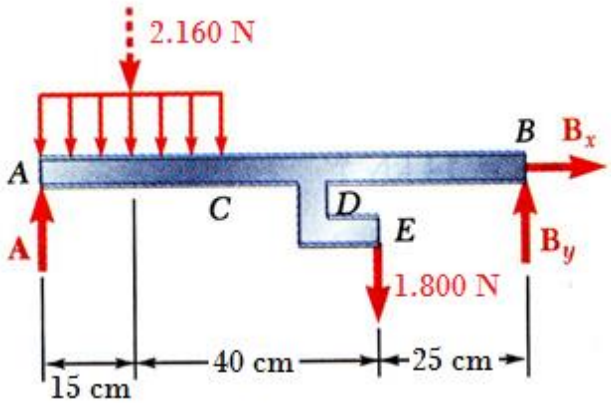
SOLUÇÃO:

- As reações em *A* e *B* são determinadas tomando-se a viga inteira como um corpo livre.
- Determinamos os esforços internos nas seções dos segmentos *AC*, *CD* e *DB*.
- Plotamos os resultados.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.3





SOLUÇÃO:

- As reações em A e B são determinadas tomando-se a viga inteira como um corpo livre.

$\sum M_A = 0$:

$$B_y(80\,\text{cm}) - (2.160\,\text{N})(15\,\text{cm}) - (1.800\,\text{N})(55\,\text{cm}) = 0$$

$$B_y = 1.642{,}5\,\text{N}$$

$\sum M_B = 0$:

$$(2.160\,\text{N})(65\,\text{cm}) + (1.800\,\text{N})(25\,\text{cm}) - A(80\,\text{cm}) = 0$$

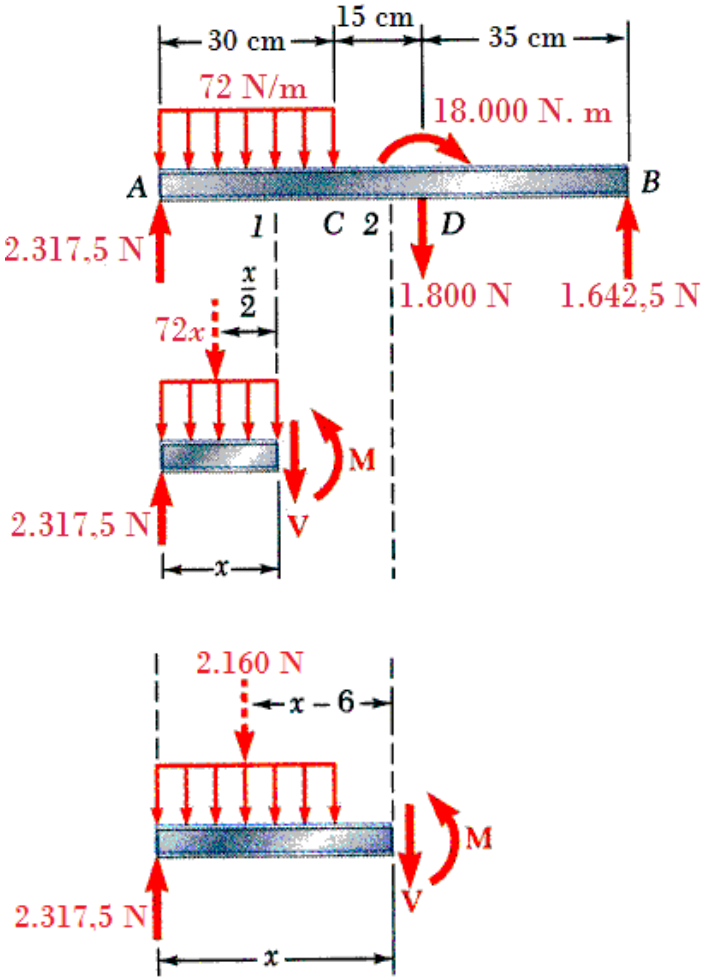
$$A = 2.317{,}5\,\text{N}$$

$\sum F_x = 0$: $B_x = 0$

- Observação: A carga de 1.800 N em E pode ser substituída por uma força de 1.800 N e um binário de 18.000 N-m em D.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.3



- Determinamos os esforços internos nas seções dos segmentos *AC*, *CD* e *DB*.

De A até *C*:

$$\sum F_y = 0: \quad 2.317{,}5 - 72x - V = 0$$

$$V = 2.317{,}5 - 72x$$

$$\sum M_1 = 0: \quad -2.317{,}5x - 72x\left(\tfrac{1}{2}x\right) + M = 0$$

$$M = 2.317{,}5x - 36x^2$$

De *C* até *D*:

$$\sum F_y = 0: \quad 2.317{,}5 - 2.160 - V = 0$$

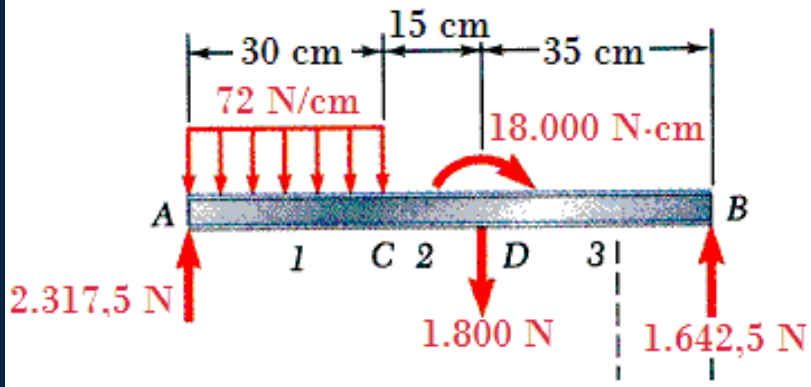
$$V = 157{,}5 \text{ N}$$

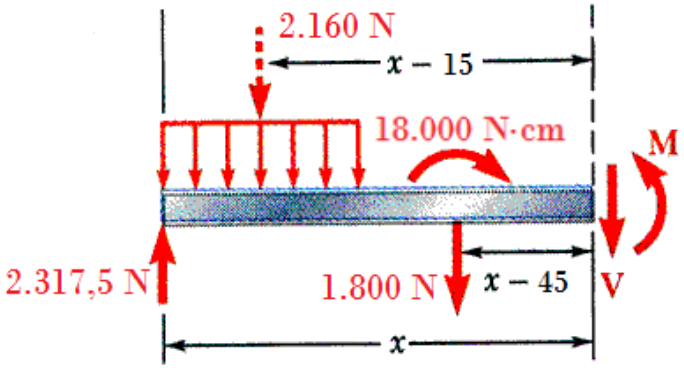
$$\sum M_2 = 0: \quad -2.317{,}5x + 2.160(x - 15) + M = 0$$

$$M = (32.400 + 157{,}5x) \text{ N} \cdot \text{cm}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.3





- Determinamos os esforços internos nas seções dos segmentos *AC*, *CD* e *DB*.

De *D* até *B*:

$$\sum F_y = 0: \quad 2.317{,}5 - 2.160 - 1.800 - V = 0$$

$$\boxed{V = -1.642{,}5\ \text{N}}$$

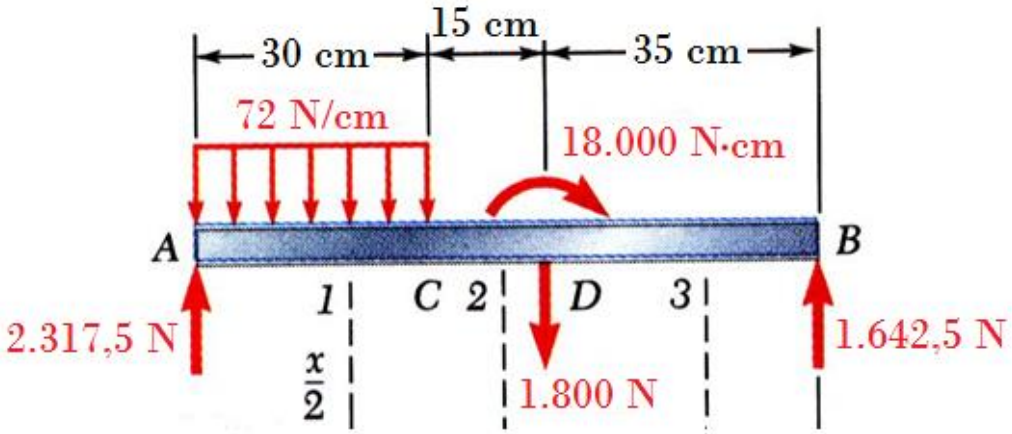
$$\sum M_2 = 0:$$

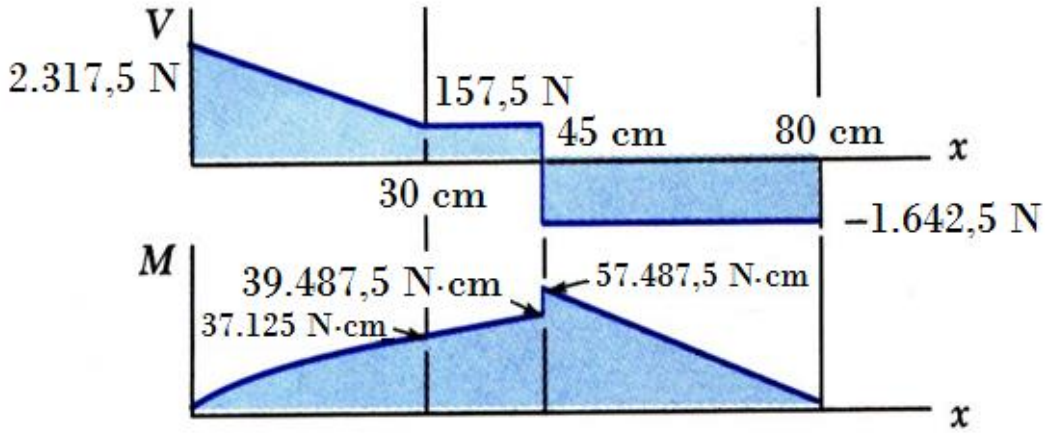
$$-2.317{,}5x + 2.160(x - 15) - 18.000 + 1.800(x - 45) + M = 0$$

$$\boxed{M = (131.400 - 1.642{,}5x)\ \text{N}\cdot\text{cm}}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.3





- Plotamos os resultados.

De A até *C*:

$$V = 2.317,5 - 72x$$

$$M = 2.317,5x - 36x^2$$

De *C* até *D*:

$$V = 157,5\ \text{N}$$

$$M = (32.400 + 157,5x)\ \text{N}\cdot\text{cm}$$

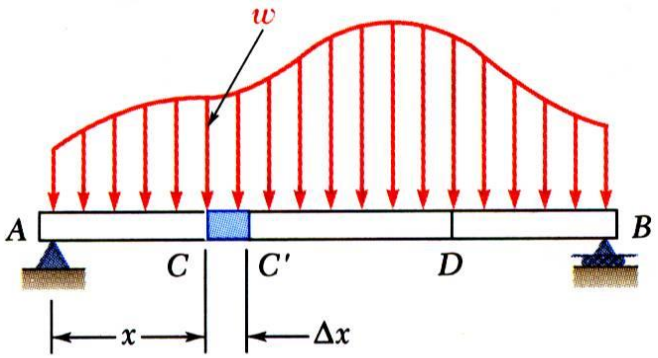
De *D* até *B*:

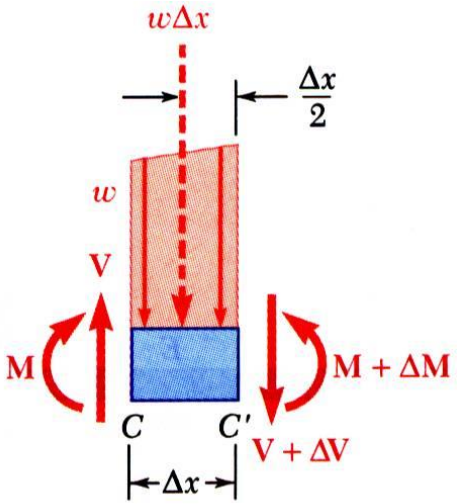
$$V = -1.642,5\ \text{N}$$

$$M = (131.400 - 1.642,5x)\ \text{N}\cdot\text{cm}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Relações entre Carregamento, Esforço Cortante e Momento Fletor





- Relações entre carregamento e esforço cortante:

$$V-(V+\Delta V)-w\Delta x=0$$

$$\frac{dV}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=-w$$

$$V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx=-(\text{área sob a curva de carregamento})$$

- Relações entre esforço cortante e momento fletor:

$$(M+\Delta M)-M-V\Delta x+w\Delta x\frac{\Delta x}{2}=0$$

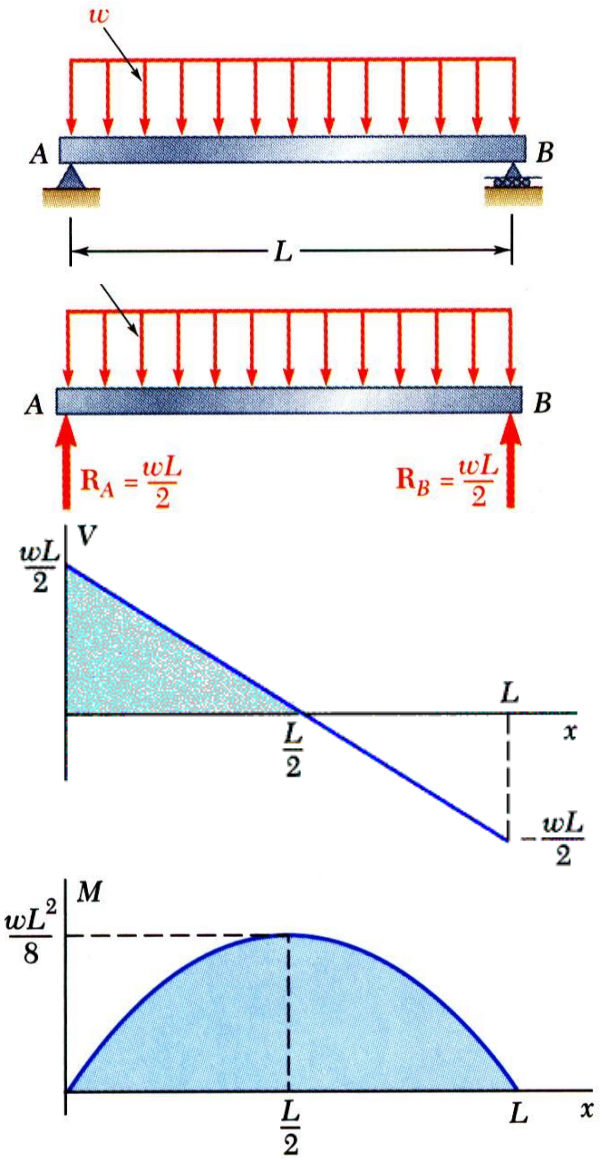
$$\frac{dM}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(V-\tfrac{1}{2}w\Delta x\right)=V$$

$$M_D-M_C=\int_{x_C}^{x_D} V\,dx=(\text{área sob a curva de carregamento})$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Relações entre Carregamento, Esforço Cortante e Momento Fletor



Para a viga ao lado temos:

- Reações de apoio: $R_A = R_B = \dfrac{wL}{2}$
- Curva de esforço cortante:

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

- Curva de momento fletor:

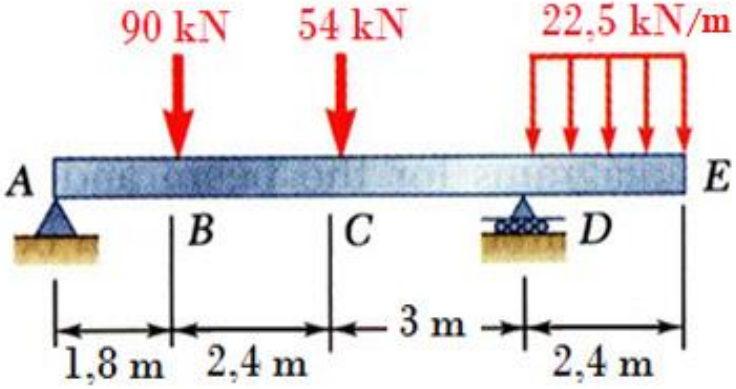
$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{w}{2}\left(Lx - x^2\right)$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{wL^2}{8} \quad \left(M_{\text{máx}} \text{ em } \frac{dM}{dx} = V = 0\right)$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.4



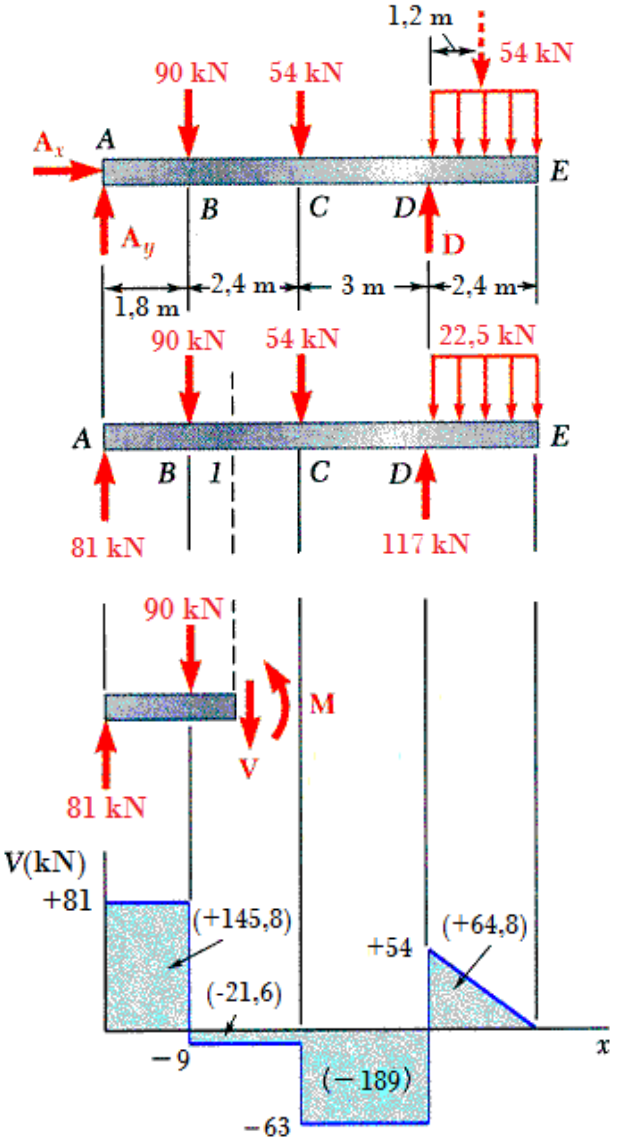
Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura.

SOLUÇÃO:

- Considerando a viga inteira como um corpo livre, determinamos as reações de apoio.
- Entre os pontos de aplicação de cargas concentradas, $dV/dx = -w = 0$, ou seja, o esforço cortante é constante.
- Entre D e E o esforço cortante varia linearmente devido ao carregamento uniforme.
- Entre os pontos de aplicação de cargas concentradas, $dM/dx = V =$ constante. Logo, a variação no momento fletor é igua à area sob a curva de esforço cortante entre esses pontos.
- Com uma variação linear do esforço cortante entre D e E, o diagrama de momento fletor é uma parábola.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.4



SOLUÇÃO:

- Considerando a viga inteira como um corpo livre, determinamos as reações de apoio.

$$\sum M_A = 0:$$

$$D(7{,}2\text{ m}) - (90\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - (54\text{ kN})(4{,}2\text{ m}) - (54\text{ kN})(8{,}4\text{ m}) = 0$$

$$D = 117\text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0:$$

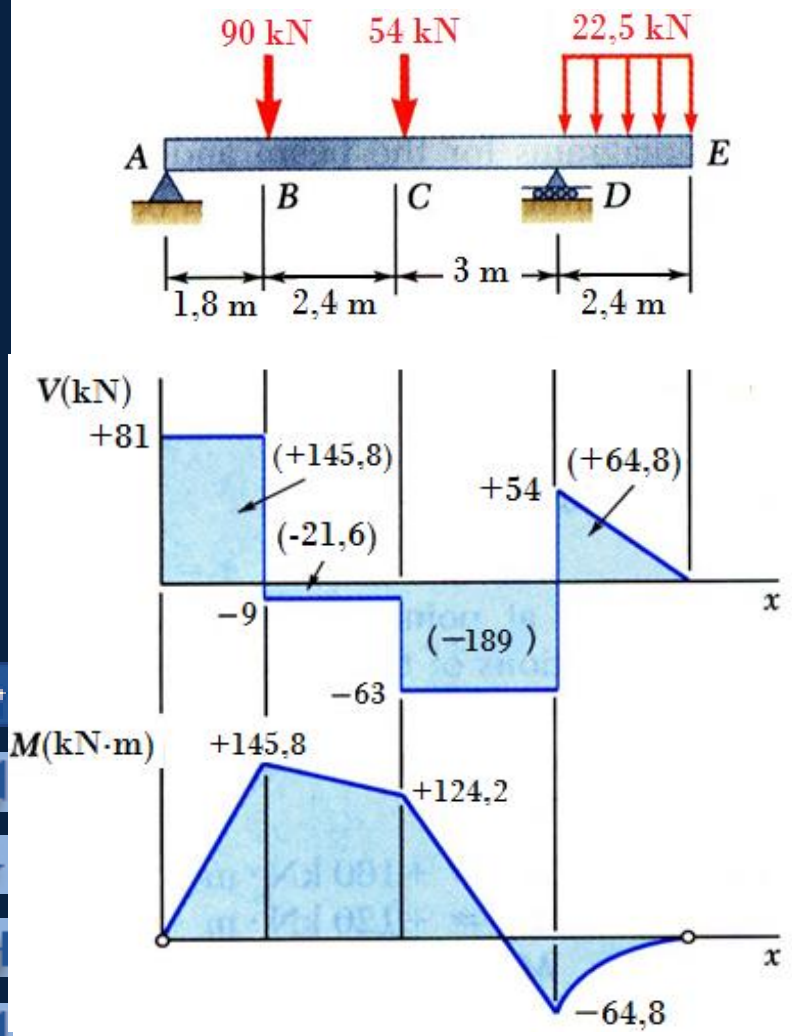
$$A_y - 90\text{ kN} - 54\text{ kN} + 117\text{ kN} - 54\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 81\text{ kN}$$

- Entre os pontos de aplicação de cargas concentradas, $dV/dx = -w = 0$.
- Entre D e E o esforço cortante varia linearmente devido ao carregamento uniforme.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.4



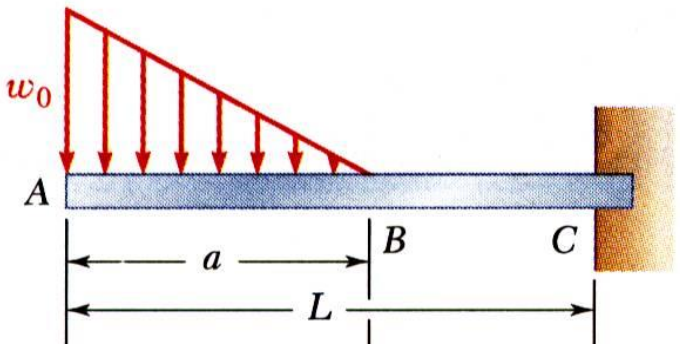
- Entre os pontos de aplicação de cargas concentradas, $dM/dx = V =$ constante. Logo, a variação no momento fletor é igual à area sob a curva de esforço cortante entre esses pontos.

$$M_B - M_A = +145{,}8 \qquad M_B = +145{,}8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_C - M_B = -21{,}6 \qquad M_C = +124{,}2\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_D - M_C = -189 \qquad M_D = -64{,}8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_E - M_D = +64{,}8 \qquad M_E = 0$$

- Com uma variação linear do esforço cortante entre D e E, o diagrama de momento fletor é uma parábola.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.6



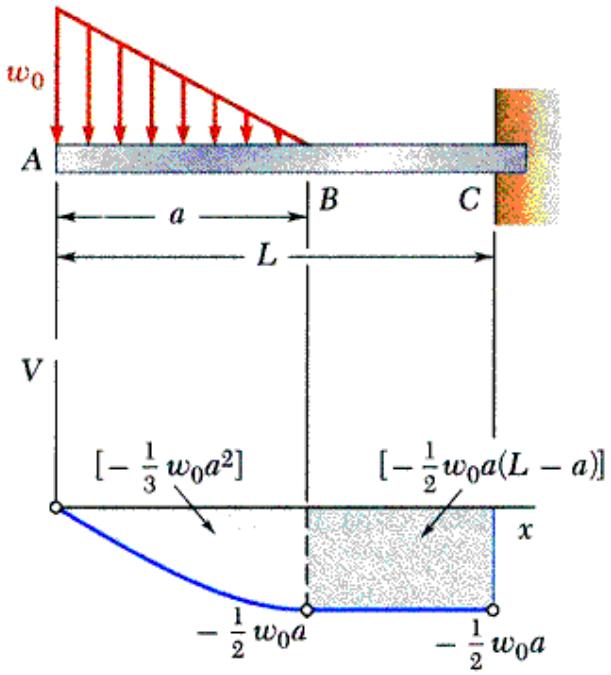
Esboce os diagrama de esforço cortante e de momento fletor para a viga em balanço mostrada na figura.

SOLUÇÃO:

- A variação no esforço cortante entre *A* e *B* é igual ao inverso da área sob a curva entre aqueles pontos. A curva de carregamento linear resulta em uma curva de esforço cortante parabólica.
- Como entre *B* e *C* a viga não está carregada, não há variação no esforço cortante entre esses pontos.
- A variação no momento fletor entre *A* e *B* é igual à área sob a curva de esforço cortante entre os dois pontos. A curva parabólica do esforço cortante resulta em uma curva cúbica para o momento fletor
- A variação no momento fletor entre *B* e *C* é igual à área sob a curva de esforço cortante entre os dois pontos. A curva constante do esforço cortante resulta em uma curva linear para o momento fletor.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.6



SOLUÇÃO:

- A variação no esforço cortante entre A e B é igual ao inverso da área sob a curva entre aqueles pontos. A curva de carregamento linear resulta em uma curva de esforço cortante parabólica.

$$\text{em } A, \quad V_A = 0, \quad \frac{dV}{dx} = -w = -w_0$$

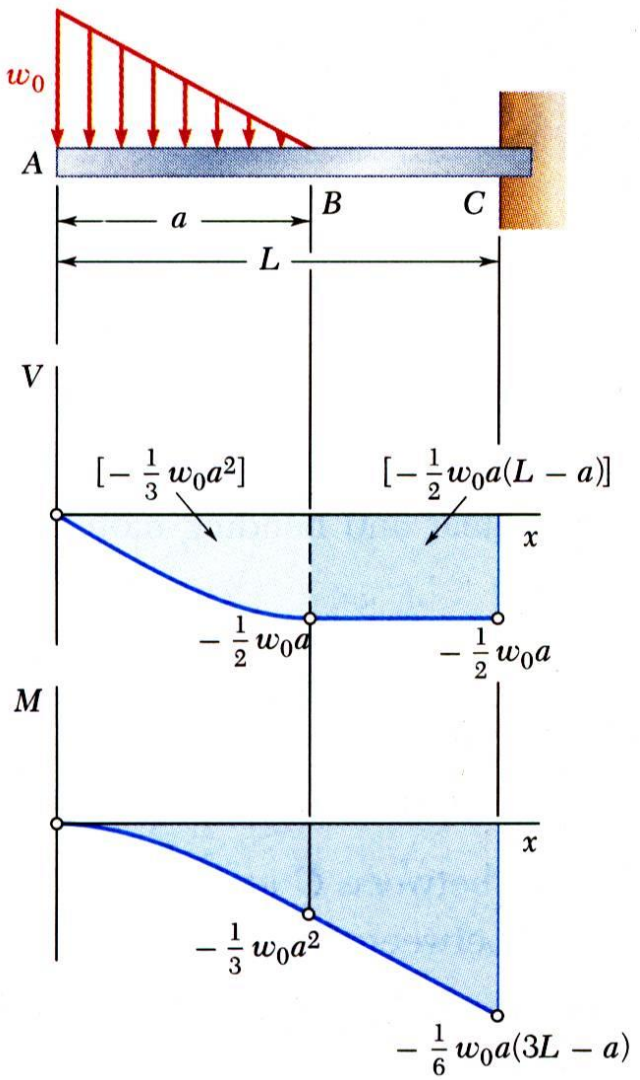
$$V_B - V_A = -\frac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\frac{1}{2}w_0a$$

$$\text{em } B, \quad \frac{dV}{dx} = -w = 0$$

- Como entre B e C a viga não está carregada, não há variação no esforço cortante entre esses pontos.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.6



- A variação no momento fletor entre A e B é igual à área sob a curva de esforço cortante entre os dois pontos. A curva parabólica do esforço cortante resulta em uma curva cúbica para o momento fletor

$$\text{em } A, \quad M_A = 0, \quad \frac{dM}{dx} = V = 0$$

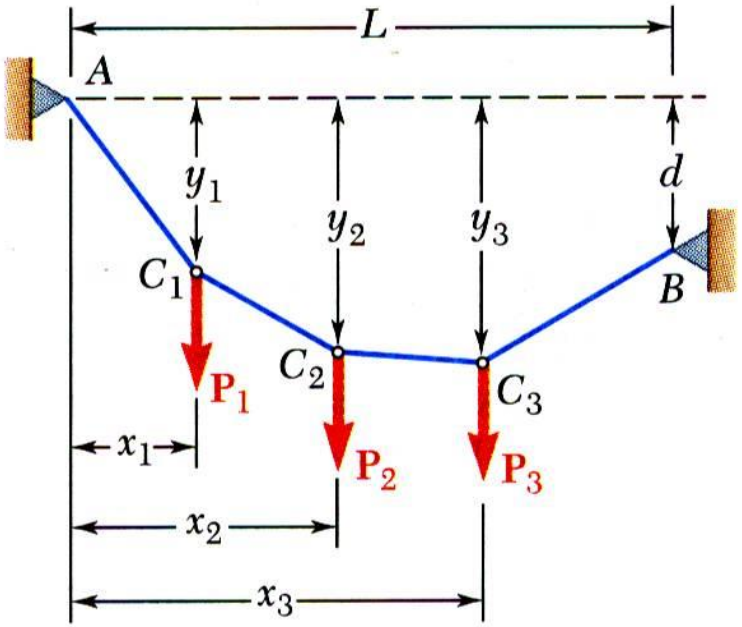
$$M_B - M_A = -\frac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\frac{1}{3}w_0a^2$$

$$M_C - M_B = -\frac{1}{2}w_0a(L-a) \qquad M_C = -\frac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

- A variação no momento fletor entre B e C é igual à área sob a curva de esforço cortante entre os dois pontos. A curva constante do esforço cortante resulta em uma curva linear para o momento fletor.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

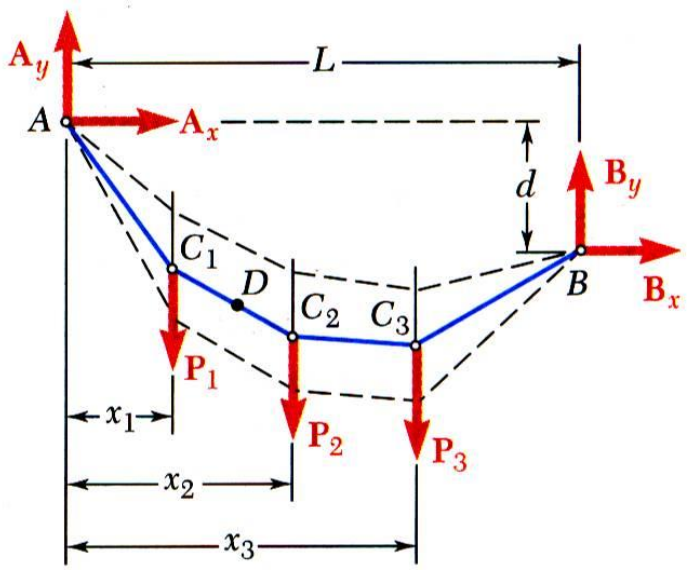
Cabos com Cargas Concentradas

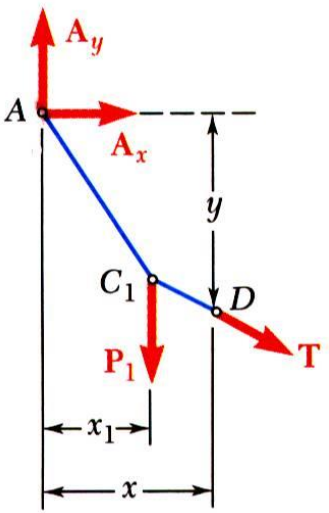


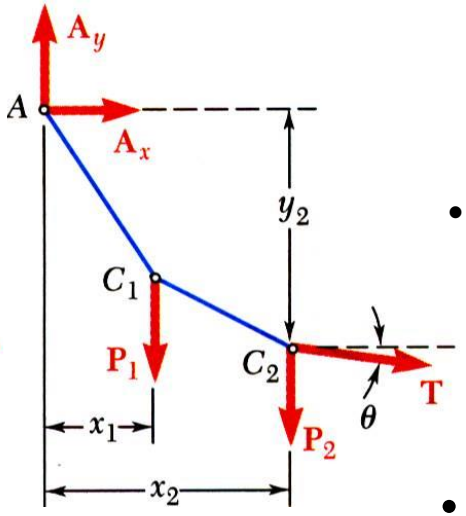
- Cabos são utilizados como elementos estruturais em pontes suspensas, linhas de transmissão, teleféricos, cabos de fixação para torres elevadas, etc.
- Para a análise de cabos assumimos que:
 a) cada uma das cargas concentradas está em uma dada linha vertical,
 b) o peso do cabo é desprezível,
 c) o cabo é flexível, ou seja, sua resistência à flexão é pequena,
 d) frações do cabo entre cargas sucessivas podem ser considerada elementos sob a ação de duas forças
- Desejamos determinar a forma do cabo, isto é, a distância vertical do apoio *A* até cada um dos ponto de aplicação de carga.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Cabos com Cargas Concentradas







- Consideremos o cabo inteiro como um corpo livre. Como as inclinações das partes do cabo presas em *A* e *B* não são conhecidas, as reações em *A* e *B* devem ser representadas por dois componentes.
- Assim, há quatro incógnitas e as três equações de equilíbrio não são suficientes para se determinarem as reações de apoio.
- Uma equação adicional é obtida considerando-se o equilíbrio de uma parte do cabo *AD* e assumindo-se que as coordenadas do ponto *D* são conhecidas. A equação adicional é:

$$\sum M_D = 0.$$

- Para outros pontos do cabo,

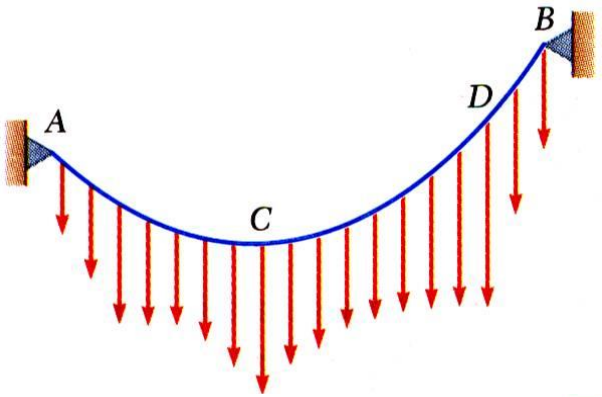
$$\sum M_{C_2} = 0 \quad \text{possibilita obter} \quad y_2$$

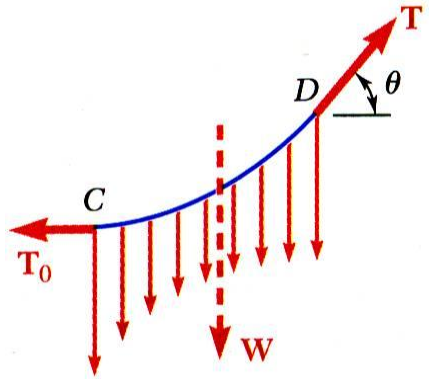
$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \quad \text{possibilita obter} \quad T_x \text{ e } T_y$$

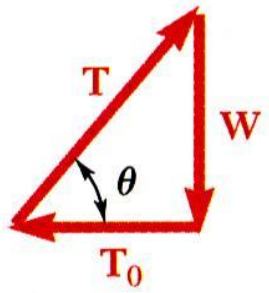
- $T_x = T\cos\theta = A_x = \text{constante}$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Cabos com Cargas Distribuídas







- Para um cabo sustentando um carga distribuída vemos que:
 a) o cabo pende tomando a forma de um curva;
 b) a força interna em um ponto *D* é uma força de tração direcionada ao longo da tangente à curva.
- Consideremos o diagrama de corpo livre da parte do cabo que se estende do ponto mais baixo *C* até um dado ponto *D*. As forças que atuam no corpo livre são uma força horizontal $\boldsymbol{T_0}$ em C e uma força tangencial $\boldsymbol{T}$ em *D*.
- A partir do triângulo de forças temos:

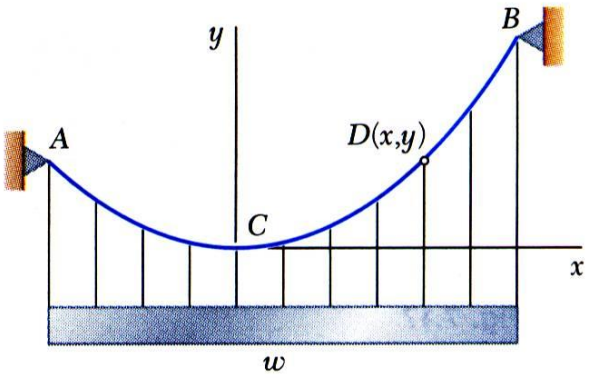
$$T\cos\theta = T_0 \qquad T\,\mathrm{sen}\,\theta = W$$

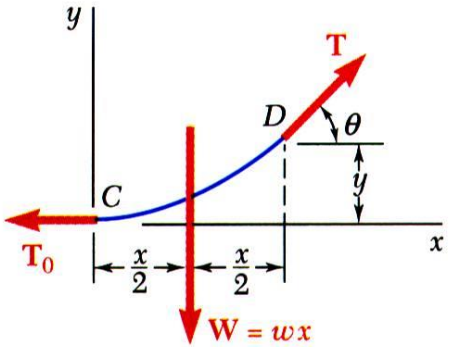
$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan\theta = \frac{W}{T_0}$$

- O componente horizontal de $\boldsymbol{T}$ é o mesmo em todo o cabo.
- O componente vertical de $\boldsymbol{T}$ é igual à intensidade *W* da carga medida a partir do ponto mais baixo.
- A tração é mínima no ponto mais baixo e máxima em *A* e *B*.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Cabo Parabólico





- Consideremos um cabo que sustenta uma carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal. Por exemplo, cabos de pontes suspensas.

- Sendo $W = wx$ a carga sustentada pela parte do cabo que vai do ponto mais baixo C até um ponto D, a intensidade e a direção da força de tração em D são obtidas por meio das relações:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \qquad \tan\theta = \frac{wx}{T_0}$$

- Somando os momentos em relação a D, temos:

$$\sum M_D = 0: \qquad wx\frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

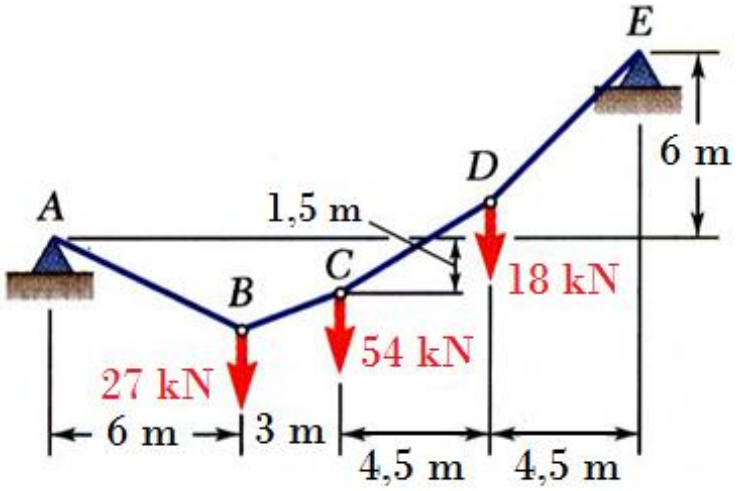
ou

$$y = \frac{wx^2}{2T_0}$$

O cabo tem o formato de uma curva parabólica.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.8



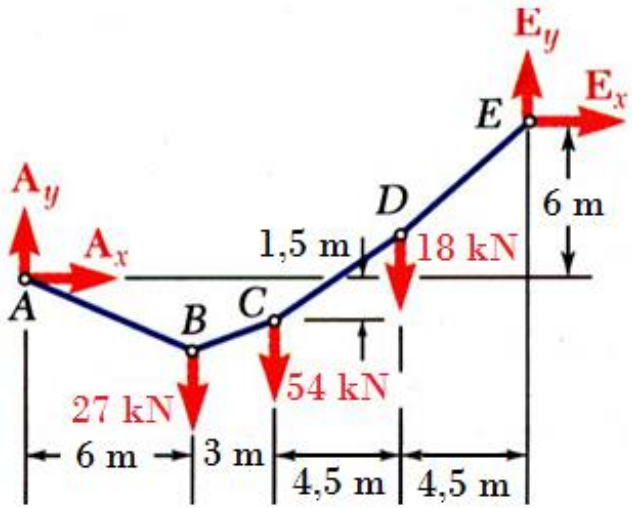
O cabo *AE* sustenta três cargas verticais nos pontos indicados. Se o ponto *C* está 1,5 m abaixo do apoio esquerdo, determine *(a)* a elevação dos pontos *B* e *D*, e *(b)* a inclinação máxima e a tração máxima no cabo.

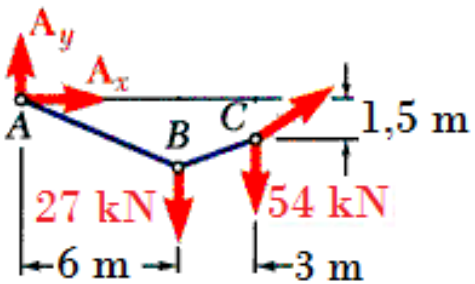
SOLUÇÃO:

- Determinamos os componentes das reações em *A* resolvendo duas equações obtidas tomando-se o cabo inteiro como um corpo livre e somando-se os momentos em relação a *E*, e tomando-se a parte *ABC* do cabo como um corpo livre e somando-se os momentos em relação a *C*.
- Calculamos a elevação de *B* considerando *AB* como um corpo livre e somando os momentos em relação a *B*. De forma análoga, calculamos a elevação de *D* tomando *ABCD* como um corpo livre.
- Determinamos a tração máxima e a inclinação máxima no cabo observando que a inclinação máxima ocorre no trecho *DE*.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.8





SOLUÇÃO:

- Determinamos os componentes das reações em *A* resolvendo duas equações obtidas tomando-se o cabo inteiro como um corpo livre e somando-se os momentos em relação a *E*,

$$\sum M_E = 0:$$

$$6A_x - 18A_y + 12(27) + 9(54) + 4{,}5(18) = 0$$

$$6A_x - 18A_y + 891 = 0$$

e tomando-se a parte *ABC* do cabo como um corpo livre e somando-se os momentos em relação a *C*.

$$\sum M_C = 0:$$

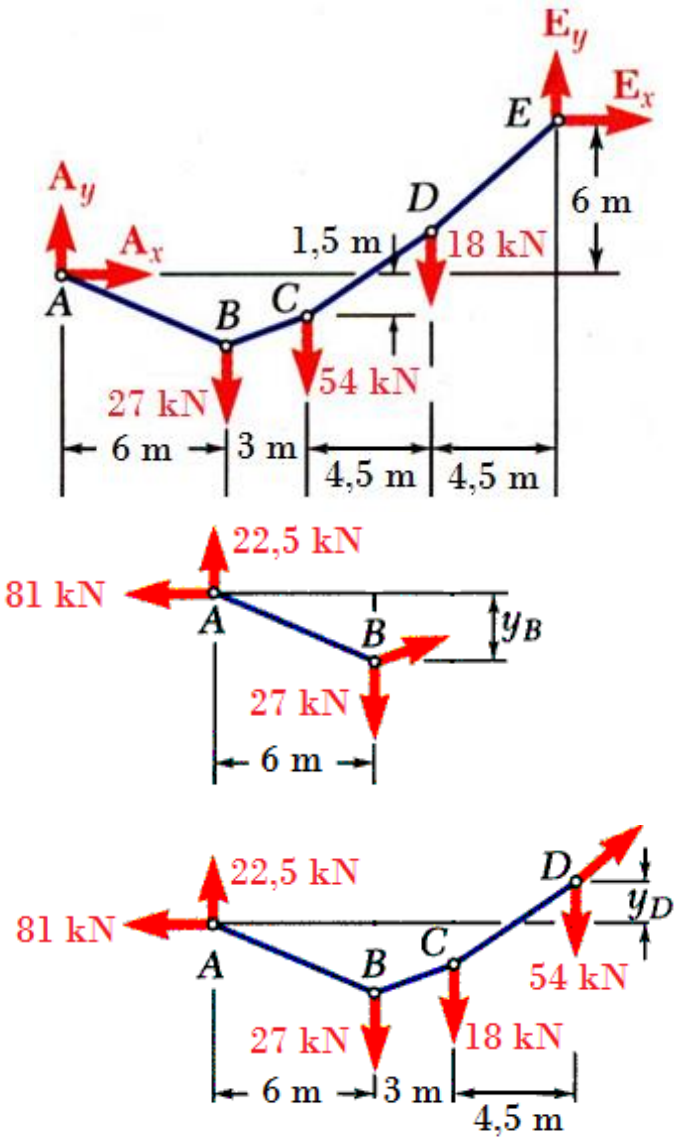
$$-1{,}5A_x - 9A_y + 3(27) = 0$$

Resolvendo as duas equações simultaneamente, obtemos:

$$A_x = -81\,\text{kN} \qquad A_y = +22{,}5\,\text{kN}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.8



- Calculamos a elevação de *B* considerando *AB* como um corpo livre e somando os momentos em relação a *B*.

$$\sum M_B = 0: \qquad y_B(81) - 6(22{,}5) = 0$$

$$\boxed{y_B = -1{,}67 \text{ m}}$$

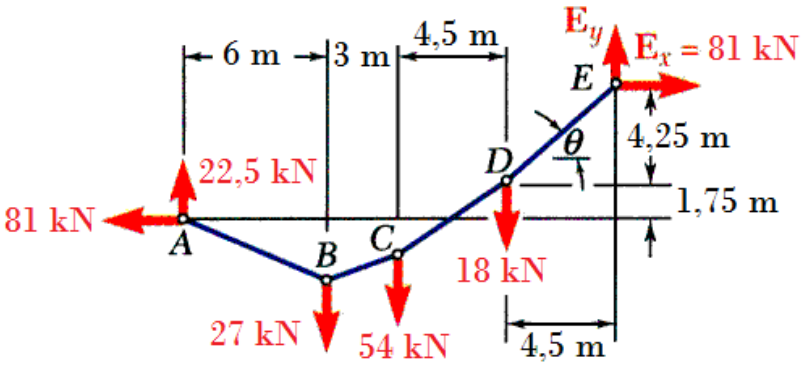
De forma análoga, calculamos a elevação de *D* tomando *ABCD* como um corpo livre.

$$\sum M_D = 0:$$
$$-y_D(81) - 13{,}5(22{,}5) + 7{,}5(27) + 4{,}5(54) = 0$$

$$\boxed{y_D = 1{,}75 \text{ m}}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Problema Resolvido 7.8



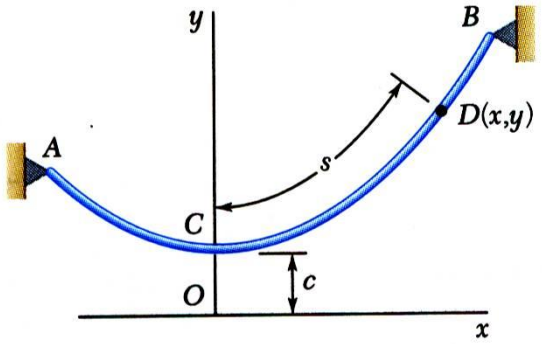
- Determinamos a tração máxima e a inclinação máxima no cabo observando que a inclinação máxima ocorre no trecho *DE*.

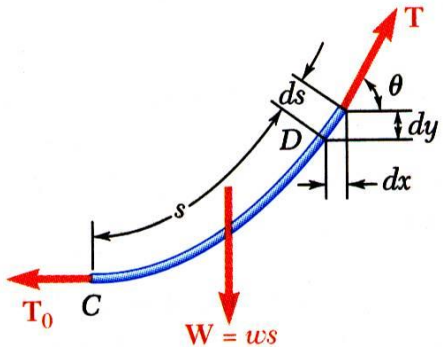
$$\tan\theta = \frac{4{,}25}{4{,}5} \qquad \boxed{\theta = 43{,}4^\circ}$$

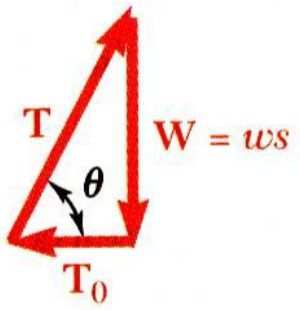
$$T_{\text{máx}} = \frac{81\,\text{kN}}{\cos\theta} \qquad \boxed{T_{\text{máx}} = 111{,}6\,\text{kN}}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Catenária







- Consideremos um cabo que sustenta um carga uniformemente distribuída ao longo do próprio cabo, por exemplo, cabos suspensos sob a ação de seu próprio peso.
- Sendo $W = ws$ a carga sustentada pela parte do cabo que vai do ponto mais baixo C até um ponto D, a intensidade da força de tração em D é dada por:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2} = w\sqrt{c^2 + s^2} \qquad c = T_0 / w$$

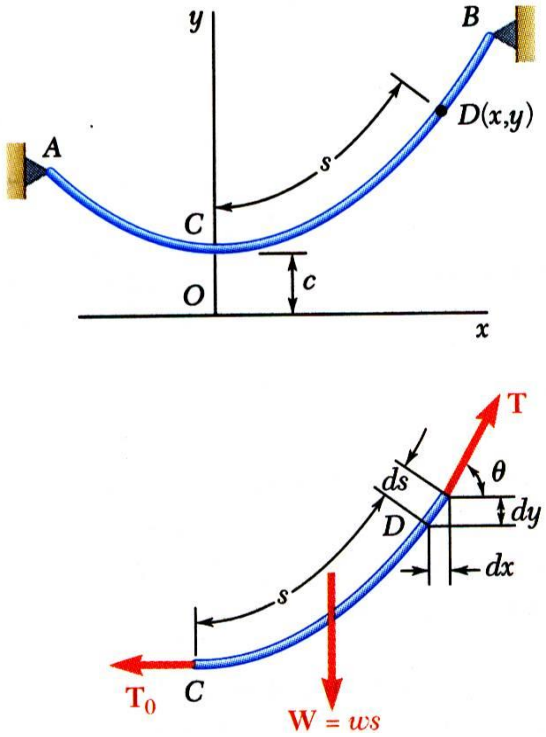
- Para relacionar a distância horizontal x ao comprimento da parte CD do cabo temos:

$$dx = ds\cos\theta = \frac{T_0}{T}\cos\theta = \frac{ds}{\sqrt{q + s^2/c^2}}$$

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{q + s^2/c^2}} = c\,\text{senh}^{-1}\frac{s}{c} \quad \text{e} \quad s = c\,\text{senh}\frac{x}{c}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Catenária



- Para relacionar as coordenadas x e y temos:

$$dy = dx \tan\theta = \frac{W}{T_0}dx = \frac{s}{c}dx = \operatorname{senh}\frac{x}{c}\,dx$$

$$y - c = \int_0^x \operatorname{senh}\frac{x}{c}\,dx = c\cosh\frac{x}{c} - c$$

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

A equação acima é a equação de uma catenária.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.